シンプレックス表作成に関する考察

高　瀬　礼　文

数理計画法に現われる，いわゆるシンプレックス表の作成は，「線形計画法」や「ゲームの理論」や「組合せ理論」等のいわゆるオペレーションズ・リサーチの諸分野において重要な役目をしめている。このシンプレックス法による解法は，未知数の個数が多いときは（多くの場合はそうであるが），今日ではコンピューターの助けをかりて比較的簡単に解くことができる。しかし，未知数の個数がそれ程多くないときに，わざわざコンピューターにかけるなど大げさなことをするよりは，計算で解いた方が簡便である場合もいぜんとして多い。

この論文では，現在一般的によく行なわれているシンプレックス表の作成方法を，もっと計算の能率をよくする目的のために，次の二つの点で改良することを提案する。

(1)　表の各段の数の計算に逆行列を利用する。

(2)　c−z の値の最大値を求めるかわりに，θ(c−z) の値の最大値を求める。

まず，典型的な線形計画法の問題から出発する。

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 = 80 \\ 5x_1+5x_2 \quad +x_4 = 250 \\ 2x_1+\ x_2 \quad\quad +x_5 = 90 \\ x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0 \end{cases}$$

なる制限条件の下で，目的函数

$$z=3x_1+4x_2$$

を最大にせよ。

次に，この問題を従来のシンプレックス表を作成して解いてみる。

B	$^t(B^{-1})$		p		p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	θ	
p_2 p_4 p_5				C		3	4	0	0	0		
2 0 0	$^1/_2$ $-^5/_2$ $-^1/_2$	p_2	p_3	0	80	1	(2)	1	0	0	40	①
5 1 0	0 1 0	p_4	p_4	0	250	5	5	0	1	0	50	②
1 0 1	0 0 1	p_5	p_5	0	90	2	1	0	0	1	90	③
			z		0	0	0	0	0	0		
p_2 p_1 p_5			c−z			3	4	0	0	0		④
1 $^1/_2$ 0	1 0 0	p_2	p_2	4	40	$^1/_2$	1	$^1/_2$	0	0	80	⑤=①×$^1/_2$
0 $^5/_2$ 0	$-^1/_5$ $^2/_5$ $-^3/_5$	p_1	p_4	0	50	($^5/_2$)	0	$-^5/_2$	1	0	20	⑥=②−⑤×5
0 $^3/_2$ 1	0 0 1	p_5	p_5	0	50	$^3/_2$	0	$-^1/_2$	0	1	$^{100}/_3$	⑦=③−⑤
			z		160	2	4	2	0	0		
			c−z			1	0	−2	0	0		⑧=④−⑤×4
			p_2	4	30	0	1	1	$-^1/_5$	0		⑨=⑤−⑩×$^1/_2$
			p_1	3	20	1	0	−1	$^2/_5$	0		⑩=⑥×$^5/_2$
			p_5	0	20	0	0	1	$-^3/_5$	1		⑪=⑦−⑩×$^3/_2$
			z		180	3	4	1	$^2/_5$	0		
			c−z			0	0	−1	$-^2/_5$	0		⑫=⑧−⑩

この表の右のワク外の式は，従来通りのシンプレックス表作成の計算の方法を示した式である。この計算方法は，一般的にいって，分数の和や積の計算が複雑に入りくんでめんどうであるし，又従って当然，計算ミスの危険が多い。

そこで，各段の計算に，逆行列 B^{-1} を利用して，これを表の中にくみ入れる方法を考えることにする。この方法は，上の表の左の側の列に現わしてある。

証明は，次の一般の線形計画の問題についてすすめる。

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots\cdots+a_{1m}x_m+a_{1m+1}x_{m+1} & =b_1 \\ a_{21}x_1+\cdots\cdots+a_{2m}x_m \qquad\qquad +a_{2m+2}x_{m+2} & =b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1+\cdots\cdots+a_{mm}x_m \qquad\qquad\qquad\qquad +a_{mn}x_n & =b_m \\ x_1\geqq 0,\ \cdots\cdots\cdots,\ x_n\geqq 0 & \end{cases}$$

なる制限条件の下で，目的函数

$$z(X)=c_1x_1+\cdots\cdots\cdots+c_nx_n$$

の最大値を求めよ。

今これを，次のように書きかえておく，

制限条件 $\begin{cases} AX=p_0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(1)} \\ X\geqq 0 \end{cases}$

目的函数 $z(X)=C\cdot X \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(2)}$

ただし，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & a_{1m+1} & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} & 0 & a_{2m+2} \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(\mathrm{p}_1\cdots\mathrm{p}_m\cdots\mathrm{p}_n)$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad p_0=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad C=(c_1\cdots\cdots\cdots c_n)$$

とする。又，もちろんこの問題は，いわゆる非退化の仮定を満しているとする。

今，或る一つの端点，$X^0=(x_1{}^0,\cdots x_m{}^0,\ 0,\cdots,0)$，$x^0{}_i>0$，を吾々は知っていると仮定し，この X^0 より出発する。即ち，

条件式 $p_0=x_1^0p_1+\cdots\cdots\cdots+x_m{}^0p_m,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(3)}$

目的函数　$z(X^0)=c_1x_1{}^0+\cdots\cdots\cdots+c_mx_m{}^0,$ ………(4)

が成立している。

今，任意の j について，($j=0, 1, 2, \cdots\cdots\cdots, n$)

$$p_j=\sum_{i=1}^{m} x^0{}_{ij}\, p_i \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

$$z_j=\sum_{i=1}^{m} x^0{}_{ij}\, c_i \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

なるように，$x^0{}_{ij}$ 及び，z_j を定義する。更に，$i=1, 2, \cdots\cdots, m, j=1, 2, \cdots\cdots, n$ としたとき，$x^0{}_{ij}$ から作られる (m, n) 行列を，基底 $p_1\cdots\cdots p_m$ に関する “タブロー” ということにする。

(5)の j を k にしたときの式に，ある正の数 θ を両辺にかけたものと，(3)より

$$p_0=(x_1{}^0-\theta x_{1k}{}^0)p_1+\cdots\cdots\cdots+(x^0{}_m-\theta x^0{}_{mk})\, p_m+\theta p_k$$

がでる。

一方，(4)と(6)とから

$$z(X^0)+\theta(c_k-z_k)=(x_1{}^0-\theta x_{1k}{}^0)c_1+\cdots\cdots+(x^0{}_m-\theta\, x^0{}_{mk})c_m+\theta c_k \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

今，$\underset{j}{Min}\, x_i{}^0/x_{ik}{}^0=\theta_0$，$x^0{}_{jk}>0$ なる式から，i 及び θ_0 を決定して，$i=l$，$\theta_0=\theta$ とする。

また，

$$X^1=\begin{pmatrix} x_1{}^0-\theta_0 x_1{}^0{}_k \\ \vdots \\ x^0{}_{l-1}-\theta_0 x^0{}_{l-1k} \\ 0 \\ x^0{}_{l+1}-\theta_0 x^0{}_{l+1k} \\ \vdots \\ x^0{}_m-\theta_0 x^0{}_{m+1k} \\ 0 \\ \vdots \\ \theta_0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1{}^1 \\ \vdots \\ x^1{}_l \\ \vdots \\ x^1{}_m \\ \vdots \\ x^1{}_k \\ \vdots \\ x^1{}_n \end{pmatrix}$$

とすると，X^1 は(1)の X^0 以外のもう一つの端点で，更に(7)より

$$z(X^0)+\theta_0(c_k-z_k)=z(X^1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

が成立する。

今ここで，$c_k-z_k>0$ であったとするならば，X^1 は X^0 より目的函数の値を大きくする。故に，吾々は，次には，端点 X^1 より出発して，上と同様な方法で新らしい端点 X^2 を見つければよい。

上のことは，(3)において基底ベクトル（$p_1\cdots p_l\cdots p_m$）が新らしい基底ベクトル（$p_1\cdots p_k\cdots p_m$）で置きかえられたわけであるから，

$$p_0=x_1{}^1p_1+\cdots\cdots+x^1{}_kp_k+\cdots\cdots+x^1{}_mp_m\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3')$$

が成立する。

また(5)は任意の j について次のようになる。

$$x_1{}^1{}_j\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+x^1{}_{l-1j}\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x^1{}_{lj}\begin{pmatrix}a_{1k}\\\vdots\\a_{lk}\\\vdots\\a_{mk}\end{pmatrix}+x^1{}_{l+1j}\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+x^1{}_{mj}\begin{pmatrix}0\\\vdots\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}\cdots(5')$$

今これを，

$$\begin{pmatrix}1&\cdots&a_{1k}&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots&&\vdots\\ \vdots&&1&&\vdots\\ \vdots&&a_{lk}&&\vdots\\ \vdots&&&1&\vdots\\ \vdots&&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&a_{mk}&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1_{1j}\\\vdots\\x^1_{lj}\\\vdots\\x^1_{mj}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1j}\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}$$

とかきかえ，更にまたこれを，

$$BX_j = p_j$$

とかくと，B は m 次の正則行列であるから，

$$X_j = B^{-1}p_j$$

が成り立つ。

即ち，

$$\begin{pmatrix} x^1_{1j} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x^1_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & -\dfrac{a_{1k}}{a_{lk}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & 1 & -\dfrac{a_{l-1k}}{a_{lk}} & & \\ & & \dfrac{1}{a_{lk}} & & \\ & & -\dfrac{a_{l+1k}}{a_{lk}} & 1 & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\dfrac{a_{mk}}{a_{lk}} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots (5'')$$

がえられる。

故に，各段におけるタブローの計算は，(5″) により，その段の一つ上の段の各列ベクトルに逆行列 B^{-1} をかけることによって計算される。

初めにあげた例題のシンプレックス表では，左側に，行列Bが書いてある。なおこの際，ベクトルとのかけ算（内積）に便利なように，B^{-1} はその転置行列 ${}^t(B^{-1})$ の形で記入した方がよいであろう。

また，たとえば第二段目についていえば，p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 の五列のタブローは，わざわざ ${}^t(B^{-1})$ との内積計算を実行しなくとも，そのまま書き入れればよいことがわかる。つまり，この段で計算が必要になるのは，p_0 と p_1 の二列のタブローのみである。

次に，(8)よりつぎのことがわかる。

“$\theta_0(c_k - z_k)$ をなるべく大きくするように，kを選ぶ方がよい。”

従来の方法では，c_k-z_k を最大にするように k を選ぶことになっているが，場合によっては，$c-z$ は最大値でなくとも，$\theta(c-z)$ の値が最大になることがある。故に，この方法でシンプレックス表を作成すると，全体の段数が短かくなる可能性が考えられる。

このことを次の例題で示す。

$$\begin{cases} 4x_1+x_2+x_3 \leqq 3 \\ \ x_1+x_2+3x_3 \leqq 2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqq 0 \end{cases}$$

の制限条件の下で，目的函数

$$z(X)=16x_1+7x_2+9x_3$$

を最大にせよ。

B		$^t(B^{-1})$			p		p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5			
p_4	p_2					C		16	7	9	0	0	θ_1	θ_2	θ_3
1	1	1	0	p_4	p_4	0	3	(4)	1	1	1	0	$\frac{3}{4}$	3	3
0	1	−1	1	p_2	p_5	0	2	1	(1)	3	0	1	2	2	$\frac{2}{3}$
					z		0	0	0	0	0	0			
p_1	p_2				c−z			16	7	9	0	0			
3	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	p_1	p_4	0	1	(3)	0	−2	1	−1	$\frac{1}{3}$		
1	1	0	1	p_2	p_2	7	2	1	1	3	0	1	2		
					z		14	7	7	21	0	7			
					c−z			9	0	−12	0	−7			
					p_1	16	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$			
					p_2	7	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$			
					z		$\frac{51}{3}$	16	7	15	3	4			
					c−z			0	0	−6	−3	−4			

この表の第一段目について，$c-z$ のとる値は（16, 7, 9, 0, 0）であるから，従来の方法ならば，最大値16の所（即ち，p_1 の所）をとり，このときの θ_1 の最小値が $\frac{3}{4}$ であるから，基底は p_4 と p_1 が交換されて第二段目に移るわけ

である。しかし，この通りにしてシンプレックス表を作成してみると，表は三段階では終らなくなる（$c-z$ の数が全部正でなくなるためには，第四段目まで作らなければならない）。

ところが，第一段目の $c-z$ の所では二番目に大きな数である 7 を選ぶと，このときの θ_2 の最小値は 2 であるから，$\theta_2(c-z)=2\times7=14$ である。一方，$c-z$ の所の最大値16を選ぶと，$\theta_1(c-z)=16\times{}^3/_4=12$ となり，14>12 であるから，基底の交換は p_5 を p_2 で入れかえることにする。この方が(8)によって，目的函数の値をもっと大きくすることができるわけである。実際この方法だと，上の表で見られるように，第三段目で $c-z$ の値は全部正でなくなり，従って表は終りになる。

参考文献

Goerge B. Dantzig ; Linear Programming and Extensions (Princeton University Press, 1963)

J.F. Mccloskey and J.M.Coppinger ; Operations Research for Management (Johns Hopkins Press, 1954)

T.L. Saaty ; Mathematical Methods of Operations Research (New York, McGaw-Hill Book Company Inc. 1960)